「杂题记录」括号序列（格路计数）

Jiayi Su (ShuYuMo)

2021-01-19 15:35:06

给出两个正整数 n, k 。

求出有多少个长度为 n 的括号序列，满足最长合法括号子序列长度恰好为 $2k$ 。

分析

根据卡特兰数的转化同样可以对这个问题进行转化。

可以发现如果前缀和为 S_i ，那么最长的合法括号子序列长度为 $n - S_n + 2\min\{S\}$，注意 $min\{S\}$ 通常为负值。

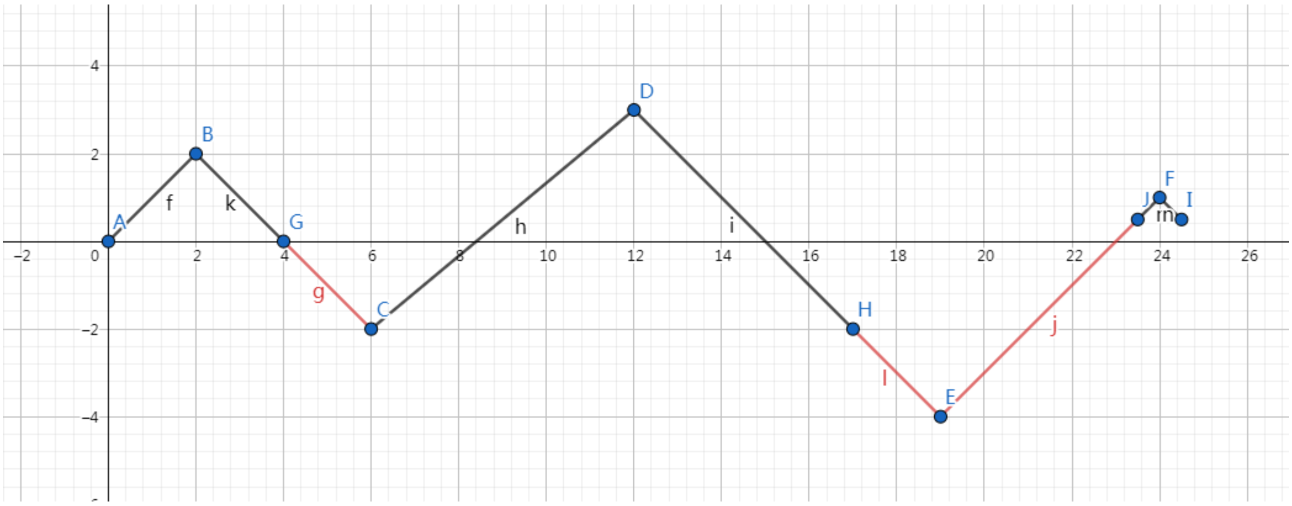

Figure 1: example.png

其中红色的线段为无效符号，E 为最低点。

设 $t = \min\{S\}$，易知 $S_n = n + 2t + 2k$。

可以考虑枚举 t ，问题就变成了格路计数，需要满足一定到达过 $y = t$ 这个直线，且未曾穿过。

未曾穿过的限制可以考虑用卡特兰数的推导相同的思想，即翻折引理。

到达过这条线的要求可以考虑用 $\min\{S\} \geq t$ 的答案减去 $\min\{S\} > t$ 的答案得到。

考虑不经过 $y = t - 1$ 时的答案：（根据翻折引理）

$$\binom{n}{(n - S_n)/2} - \binom{n}{[n - (2(t-1) - S_n)]/2} = \binom{n}{k-t} - \binom{n}{k-1}$$

同理，不经过 $y = t$ 的答案为：

$$\binom{n}{k-t} - \binom{n}{k}$$

做差发现是：

$$\binom{n}{k-1}-\binom{n}{k}$$

有不等式 $S_n \geq \min\{S\}$，易知：$t \geq 2k-n$. 即 k 有 $n-2k+1$ 种取值。

答案为：$(n+1-2k)\left(\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\right)$

这应该就能做到线性了，如果有个小巧的质数就能做到更快了。