「比赛总结」正睿省选失恋测

Jiayi Su (ShuYuMo)

2021-03-10 07:43:18

正睿十连测 Round 8 补题记录。菜到去世……

陈太阳的石子游戏

有 n 堆石子，每堆石子被染成了黑色或者白色，第 i 堆石子有 a_i 个石子。陈太阳和杨主力轮流操作，杨主力先操作。操作有两种，他们每次可以选择一种进行操作：

- 从石子数量最少的黑堆中取出任意正整数数量的石头
- 从任何白堆中取出任意正整数数量的石头

不能操作的玩家将会输掉游戏。现在所有石头堆都是固定的，但尚未着色。陈太阳贿赂了裁判，使他有机会自己给所有石头涂色。现在，他想知道有多少种涂色方法使得自己能赢下游戏？由于答案可能太大，因此只需要输出模 1000000007 答案即可。

$n \leq 10^6$

好吧 - -这才明白什么叫做 `SG` 函数。

Sprague-Grundy(SG) 定理

对于一个完整的游戏局面 G ，有若干个子游戏 $G_0, G_1, G_2, \cdots$ 那么：

$$\mathrm{SG}(G) = \bigoplus G_i$$

对于一个局面 x ，若其有若干个后继局面，则：

$$\mathrm{SG}(x) = \mathrm{mex}\{\mathrm{SG}(y) \mid y\text{是}x\text{后继}\}$$

特殊地，若一个局面 P 没有后继局面，则其 SG 值为 0。

首先考虑必胜局面条件是什么：

对一个局面划分子游戏，显然，白色石头和黑色石头可以作为两个子游戏，白色石头构成一个经典的 `Nim` 游戏。只需要考虑黑色石头的 SG 值即可。

通过手算不难发现黑色石头的 SG 值为：

$$\text{最小堆中的石头数} - (\text{最小堆的数量} + [\text{所有黑色石头堆都具有相同的大小}])\%2$$

先按照石子数量排序。

可以考虑枚举最小堆出现次数和石子数量 x，石子数量小于 x 的石子堆一定是白色堆，枚举一个出现次数，可以算出石子数量等于 x 和小于 x 的堆的 SG 值 z，然后考虑后面的石子堆有多少种选法，使得其 SG 值等于 z 即可。这个问题是 线性基 的经典问题。

陈阳太的集合

陈阳太有个集合 $U = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 她打算和杨主力轮流操作。

- 陈阳太负责一次拆分操作。具体地，陈阳太会将集合 U 分成至少两个非空集合，它们的并集为 U 且两两交集均为 $\emptyset$。
- 杨主力负责多次合并操作。具体地，杨主力首先收到陈阳太操作后的所有集合，随后每当杨主力手上存有多于一个集合，则必须取出两个集合合二为一，即取出的集合消失并获得它们的并集。

显然最终杨主力将获得集合 U，同时操作结束。

定义两局操作不同，当且仅当存在集合 S，在一局操作中出现过且在另一局操作中从未出现。注意，与操作次序无关。

求杨主力和陈阳太一共有多少局不同的操作，对 NTT 质数取模。

$n \leq 10^6$

只考虑如何合并一些集合，可以倒过来考虑，考虑一开始有一个全集 U ，如何拆分成若干个子集，显然每一种拆分方式对应一个操作等价类。

考虑递推式：

设 $f(n)$ 为将元素个数为 n 的集合拆分成若干个集合的情况。

易知递推式为：

$$f(n) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} f(i) f(n-i)$$

其中 $+1$ 是考虑到这个集合就在这里停止划分，后面的 $\frac{1}{2}$ 是因为划分没有什么顺序性。

可以考虑生成函数优化，这个式子后面的项稍微补补就是一个卷积，先定义 $f(0) = 1$，可以把式子写成：

$$f(n) = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f(i)(n-i) \right) - 2 \times f(n) \right]$$

$$2f(n) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f(i)(n-i)$$

补齐常数项：

$$2f(n) = 1 + \frac{[n=0]}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f(i)(n-i)$$

有组合数，考虑指数生成函数：

$$2\frac{f(n)}{n!} = \frac{1 + \frac{[n=0]}{2}}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{f(i)}{i!} \frac{f(n-i)}{(n-i)!}$$

设 $F(x) = \sum_{i \geq 0} f(i) \frac{x^i}{i!}$

$$2F(x) = e^x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F^2(x)$$

解出 $F(x)$ 根据常数项，得到最终取值为：

$$F(x) = 2 + \sqrt{3 + 2e^x}$$

需要一个多项式开方。大佬们对长度为 10^6 的多项式开方都冲到 $500ms$ 了，我的甚至需要跑 $8s$ 左右，就很震撼 /kk。

题目关键是对计数对象的转化，需要根据题目描述的等价类划分方式，确定转化为何种计数对象。

陈太阳的树

陈太阳有一棵 n 个点的树，每条边 e_i 上有一个非空字母集合 $S_i \subset \{'a', 'b', \cdots, 'z'\}$，陈太阳还有一个模板串集合 $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$

杨主力给了陈太阳 q 次询问，每次询问给定一条从 u 到 v 的有向树链，问有多少种在树边上选字母的方案，使得将所有树链上的字母按照从 u 到 v 的顺序写出来之后形成的字符串包含模板串集合中至少一个模板串。

杨主力不想让答案数字太大，于是陈太阳只需要告诉杨主力对 998244353 取模的结果就好了。

输入第一行两个正整数 n, m, q，分别表示树的大小，模板串集合的大小以及询问的个数。

接下来 $n-1$ 行，每行两个正整数 $u, v (1 \le u < v \le n)$ 以及一个字符串 s，表示 u 点到 v 点之间有一条边，边上的非空字母集合由 s 中的所有字母构成。保证 s 只包含小写字母且不包含重复的字符

接下来 m 行，每行一个字符串，表示一个模板串。保证所有模板串的长度之和不超过 40

接下来 q 行，每行两个正整数 $u, v (1 \le u, v \le n, u \ne v)$，表示一次询问。

$1 \le n \le 2500, 1 \le q \le 5000, 1 \le m \le 40, \sum |t_i| \le 40$

多模板匹配问题，显然需要 AC 自动机，显然可以在 AC 自动机上对路径 dp。

一个 AC 自动机的技巧：如果只是想判断 AC 自动机中是否存在一个模板串可以在文本串中完全匹配，可以考虑强制将 AC 自动机中每一个模板串结束字符对应结点的出边全都连向自己。最后走完文本串后一定会停留在一个模板串结尾的对应结点。

但是这里的文本串不确定，就可以考虑在 AC 自动机上 dp。

设 $dp[n][u]$ 表示考虑了路径的前 n 个结点，到达结点 u 的路径个数。

如果每次暴力 dp 就能够得到 $\mathcal{O}(qnt^3)$ 的做法。

考虑到每个边的转移其实是相似的，按照动态 dp 的套路可以把每一条树边的贡献理解为一种线性变换？考虑使用矩阵乘法表示转移，每一条树边就对应一个矩阵，可以倍增预处理就能够做到单次询问 $\mathcal{O}(t^2 \log n)$ 的复杂度。

可以考虑树剖然后线段树维护矩阵乘积。

还可以点分之后预处理每个点到其祖先路径上的矩阵乘积，然后点分树上合并矩阵乘法。

还可以点分之后离线处理每个询问。

能过几个就不得而知了