「比赛总结」洛谷 10 月赛

Jiayi Su (ShuYuMo)

2020-10-19 15:35:06

洛谷 2020 年 10 月 月赛 有两道期望题分数拿的还不错.

Pro. A

给出一张无向图，从任意一点出发，规定每条边只能经过一次（正向 反向都算一次）。求最长的合法路径长度。

考虑每次经过一个点 x ，就会使点 x 的可用度数减 2 。如果走到一个合法度数为 0 的点，那么路径终止。要求是求最长路径长度，那么显然应该以此减少每个点的可用度数。每个点的初始度数为 n - 1。特殊考虑有偶数个点的完全图，初始度数为奇数，那么最后一次仍然可以走一步到达一个点。

$$\frac{n-1}{2} \times n + [n \bmod 2 \ = \ 0]$$

code

```
# python3
T = int(input())
for i in range(T):
    now = int(input())
    print((now - 1) // 2 * now + ((now & 1) ^ 1))
```

Pro. B

总共有 n 条带「圣盾」的「胖头鱼」和 m 条不带圣盾的胖头鱼，每次等概率对一条存活的胖头鱼造成「剧毒」伤害。现在 Amazing John 想知道，期望造成多少次伤害可以杀死全部胖头鱼？
答案对 998244353 取模。

- 「圣盾」：当拥有圣盾的胖头鱼受到伤害时，免疫这条鱼所受到的本次伤害。免疫伤害后，圣盾被破坏。
- 「胖头鱼」：在一条胖头鱼的圣盾被破坏后，给予其他所有没有死亡且没有圣盾的胖头鱼圣盾。
- 「剧毒」：立即杀死没有圣盾的胖头鱼。

本题共有 20 个数据点，数据点从 1 到 20 编号。对于一个子任务，只有通过其中所有数据点才能获得该子任务的分数。

子任务	数据点	数据范围	分数
1	$1 \sim 3$	$n, m \le 5 \times 10^3$	15
2	$4 \sim 5$	$n \le 10^6$ $m = 0$	10
3	$6 \sim 10$	$n, m \le 10^6$	25
4	$11 \sim 14$	$n \le 10^{14}$ $m = 0$	20
5	$15 \sim 20$	$n \le 10^{14}$ $m \le 10^6$	30

为描述方便，使用 0 代表无圣盾的胖头鱼，1 代表有圣盾的胖头鱼。即，局面可以使用一串 0-1 串表示。

考虑一个局面：有 n 个 0 ，m 个 1（000000000000011111111）。- 如果一次操作作用在 0 上，那么会使其死亡 局面变成有（n - 1）个 0，m 个 1。其概率为 $\frac{n}{n+m}$ 。- 如果一次操作作用在 1 上，那么会使其死亡 局面变成有 1 个 0，(n + m) 个 1。其概率为 $\frac{m}{n+m}$ 。设: 一个局面的期望结束操作步数函数为 $f(n,m)$ 。特殊的，设 有 n 个 1 的局面的期望奇数操作步数函数 $\mathrm{g}(n) = \mathrm{f}(0,n)$

易知：

$$\mathrm{f}(n,m) = 1 + \frac{n}{n+m} \times \mathrm{f}(n-1,m) + \frac{m}{n+m} \times [\ \mathrm{g}(n+m) - 1\ ]$$

$$\mathrm{g}(n) = 2 + \frac{1}{n} \times \mathrm{g}(n-1) + \frac{n-1}{n} \times [\ \mathrm{g}(n) - 1\ ]$$

化简得

$$\mathrm{g}(n) = \frac{n \times (n+1)}{2} + n$$

最后答案就是 $\mathrm{f}(n,m)$, 递归求解即可。

code

```
#define int long long
int inv(int x) { x %= MOD; int a = x, b = MOD - 2, ans = 1; while(b) { if(b & 1) ans = (ans *1ll* a) %
int f(int n) { n %= MOD; return ((n) *1ll* (n + 1) % MOD * inv(2) % MOD + n) % MOD; }
int g(int n) { return (f(n) - 1 + MOD )% MOD; }
int doit(int n, int m){
    if(m <= 0) return f(n);
    return (((n % MOD) * inv(n + m) % MOD) * g(n + m) % MOD + (m *1ll* inv(n + m) % MOD) * doit(n, m -
}
signed main(){
    int n = read(), m = read();
    printf("%lld\n", doit(n, m));
    return 0;
}
```

Pro. C

给出一个长度为 n 的序列（保证 $A_i \in [1,2]$），m 次操作。- 询问操作格式为 `A s`，表示询问是否有一种散步方案使得美丽值之和为 s。- 修改操作格式为 `C i val`，表示将第 i 朵花的美丽值改成 $val(val = 1$ 或 $2)$。

对于每一个询问，若有合法的方案，输出这个方案的左右端点位置（多种方案时输出左端点最小的方案），否则输出 none。

Subtask 1 $(20pts)$：对于数据点 $1 \sim 5$，满足 $1 \le n,m \le 1000$。

Subtask 2 $(30pts)$：对于数据点 $6 \sim 10$，满足 $1 \le n,m \le 2.5 \times 10^5$。

Subtask 3 $(50pts)$：对于数据点 $11 \sim 15$，满足 $1 \le n,m \le 2 \times 10^6$。

对于 100% 的数据，有 $1 \le n,m \le 2 \times 10^6, 0 \le s \le 2^{31} - 1$。每次修改操作时 $i \in [1,n], val \in \{1,2\}$。

对于所有数据点，时间限制 2000 ms，空间限制 256 MB。

留坑！

Pro. D

有一个无限大的棋盘来下马棋。

有一个马最开始在 $(0,0)$，它的每一步可以走一个 $a\times b$ 的矩形（即能够从 (x,y) 到达 $(x\pm a,y\pm b)$ 或 $(x\pm b,y\pm a)$ ）。

若马通过上述移动方式可以到达棋盘中任意一个点，那么 $p(a,b)=1$，否则 $p(a,b)=0$。

现在 Amazing John 给你 T 组询问，每组询问他会给出一个正整数 n，他想知道

$$\left(\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}p(a,b)\right) \bmod 2^{64}$$

的值。

本题开启 **Subtask**

子任务	数据点	数据范围	分数
1	1	$n\le 10, T\le 5$	5
2	$2\sim 5$	$n\le 3000, T\le 5$	15
3	$6\sim 10$	$n\le 10^5, T\le 5$	15
4	$11\sim 15$	$n\le 10^7, T\le 5$	15
5	$16\sim 18$	$n\le 10^9, T\le 5$	15
6	$19\sim 25$	$n\times T\le 10^{11}, T\le 5$	35

注 1：对于 $n\times T\ge 5*10^{10}$ 的数据点，时限为 **4s** ，其余均为 **2.5s** 。且对于所有数据点，空间限制为 **500MB** 。

注 2：输出答案 $\bmod 2^{64}$ 即对 **64** 位无符号整数 自然溢出。

~~通过打表可知：~~其中的函数 p，$p(a,b)=[a\perp b]\ [(a-b) \bmod 2\ =\ 1]$

考虑每个数字的贡献，因为 a b 的差为奇数 所以 a b 的奇偶性不同。- 对于偶数 x 贡献为 $\varphi(x)$ - 对于奇数 x 贡献为 $\frac{\varphi(x)}{2}$，即 与 x 互质的偶数个数。

答案就是：

$$2\times[\ \sum_{i=1}^{n}[i \bmod 2\ =1]\frac{\varphi(i)}{2}+\sum_{i=1}^{n}[i \bmod 2\ =0]\varphi(i)\ ]$$

50pts 不知道怎么杜教筛降复杂度。

code

```
// 线性筛 phi
#define ULL unsigned long long
void doit(){
    int n = read();
    ULL ans = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        ans += (i & 1) ? (phi[i] >> 1) : phi[i];
    }
```

```c
    printf("%llu\n", ans << 1);
}
int main(){
    int T = read(); euler(1e7 + 2); while(T--) doit(); return 0;
}
```