「琐记」卡特兰数

Jiayi Su (ShuYuMo)

2021-01-19 15:35:06

卡特兰数的证明能够扩展到处理一类括号序列的问题上。不仅仅只是为了应付 ~~sb~~ 初赛。

卡特兰数

基本定义

使用 $C(n)$ 表示卡特兰数的第 n 项。

通项：

$$C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

递推式：

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C(i)C(n-1-i)$$

通项的推导

考虑通项公式的推导：

第 n 项卡特兰数的定义之一就是 n 对括号的合法配对方案。

将括号序列中的 `(` 看成 `+1` 将 `(` 看成 `-1` ，合法的括号序列方案不仅仅是代数和等于 0 这么简单。

如果某一个位置的前缀和变成负数，那么这个括号是不可能合法了。

所以，按照上面括号向数字的映射定义，这个序列的任意一个位置的前缀和都应该不小于 0。

可以将问题转化为从平面上 $(0,0)$ 走到 $(2n,0)$，每一个位置都需要决策是沿着右上对角线走还是沿着右下对角线走。走的过程中不能越过 $y=0$ 这条线。

考虑没有最后一条限制，方案数就是 $\binom{2n}{n}$。

考虑哪些方案不合法，必然是到达过 $y=-1$ 这条线的方案都不合法，考虑算出这部分不合法的方案。

可以强制一定要穿过 $y=-1$ 这条线，只需要把终点设置为原终点 $(2n,0)$ 关于 $y=-1$ 的对称点 $(2n,-2)$，然后格路计数，考虑这样统计的所有方案一定穿过了若干次 $y=-1$ ，考虑最后一次穿过的点，到终点这一段路径全部翻着之后就是走到原终点的方案。不难发现，之前所计入的不合法方案和走到 $(2n,-2)$ 的方案一一对应。

这样就能得到不合法的方案数为 $\binom{2n}{n-1}$

《组合数学》中给出的证明只是把 `最后一次穿越` 改成了 `第一次穿越`，没有引入格点计数的转换，本质相同。

应用

卡特兰数的几个应用如下：

- n 对括号的合法配对方案数.

- n 个节点的有根二叉树的形态数. 这个对应了递推式.
- n 个数入栈后出栈的排列总数
- 对凸 $n+2$ 边形进行不同的三角形分割的方案数 (分割线断点仅为顶点，且分割线仅在顶点上相交)
- n 层的阶梯切割为 n 个矩形的切法数 P2532 [AHOI2012] 树屋阶梯
- $n+1$ 个叶子（n 个非叶子）的满二叉树形态数，这个对应了递推式.

这里的满二叉树指满足 结点要么是叶子结点，度为 **0**，要么是度为 **2** 的结点，不存在度为 **1** 的结点 的二叉树。

> 美国以及国际上所定义的满二叉树，即 full binary tree , 和国内的定义不同，美国 NIST 给出的定义为：A binary tree in which each node has exactly zero or two children. In other words, every node is either a leaf or has two children. For efficiency, any Huffman coding is a full binary tree.

前几项为：1,1,2,5,14,42,132

- BZOJ 3907 网格